**Trabajo Práctico N° 6:**

**Estimación Puntual.**

**Ejercicio 1.**

*Suponer que se tiene una muestra aleatoria de tamaño n tomada de una población X, que E (X)= y V (x)= . Sean*

*= y =*

*dos estimadores de . ¿Cuál es el mejor estimador de ? Explicar la elección.*

E ()= E ( )

E ()= E ()

E ()= por (\*)

E ()=

E ()= (n - 1)

E ()= .

V ()= V ( )

V ()= V ()

V ()= por (\*\*)

V ()=

V ()= (n - 1)

V ()= .

ECM ()= + V ()

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= 0 +

ECM ()= .

E ()= E ( )

E ()= E ()

E ()= por (\*)

E ()=

E ()= n

E ()= .

V ()= V ( )

V ()= V ()

V ()= por (\*\*)

V ()=

V ()= n

V ()= .

(\*) propiedad de linealidad de la esperanza.

(\*\*) propiedad de la varianza e independencia.

ECM ()= + V ()

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= 0 +

ECM ()= .

ECM ()= ECM ()= .

Por lo tanto, el mejor estimador de es , ya que tiene menor error cuadrático medio.

**Ejercicio 2.**

*Sea , , … , una muestra aleatoria de una población que tiene media y varianza . Considerar los siguientes estimadores de :*

= ; = ; = .

**(a)** *¿Alguno de estos estimadores es insesgado?*

E ()= E ()

E ()= E ( + + + + + + )

E ()= [E () + E () + E () + E () + E () + E () + E ()] por (\*)

E ()= 7 E ()

E ()= .

E ()= E ()

E ()= E (2 - + )

E ()= [E (2) - E () + E ()] por (\*)

E ()= [2 E () - + ]

E ()= (2 - + )

E ()= 2

E ()= .

E ()= E ()

E ()= E (2 - + )

E ()= [E (2) - E () + E ()] por (\*)

E ()= [2 E () - + ]

E ()= (2 - + )

E ()= .

(\*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, y son insesgados.

**(b)** *Hallar el error cuadrático medio de los estimadores.*

V ()= V ()

V ()= V ( + + + + + + )

V ()= [V () + V () + V () + V () + V () + V () + V ()] por (\*\*)

V ()= 7 V ()

V ()= .

V ()= V ()

V ()= V (2 - + )

V ()= [V (2) + V () + V ()] por (\*\*)

V ()= [4 V () + + ]

V ()= (4 + + )

V ()= 6

V ()= .

V ()= V ()

V ()= V (2 + + )

V ()= [V (2) + V () + V ()] por (\*\*)

V ()= [4 V () + + ]

V ()= (4 + + )

V ()= 6

V ()= .

(\*\*) propiedad de la varianza e independencia.

ECM ()= + V ()

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= 0 +

ECM ()= .

ECM ()= + V ()

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= 0 +

ECM ()= .

ECM ()= + V ()

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= +

ECM ()= + .

**(c)** *¿Cuál estimador es el “mejor”? ¿En qué sentido es mejor?*

ECM ()= ECM ()= .

ECM ()= ECM ()= + .

El “mejor” estimador es , ya que tiene menor error cuadrático medio.

**Ejercicio 3.**

*Sea , , … , una muestra aleatoria de tamaño n.*

**(a)** *Demostrar que es un estimador sesgado de .*

Media poblacional de , i= 1, 2, … , n: .

Varianza poblacional de , i= 1, 2, … , n: .

E ()= V () +

E ()= V () +

E ()= V () +

E ()= + por (\*)

E ()= +

E ()= n +

E ()= + .

(\*) propiedad de linealidad de la esperanza.

Por lo tanto, es un estimador sesgado de .

**(b)** *Determinar la magnitud del sesgo de este estimador.*

Sesgo ()= E () -

Sesgo ()= + -

Sesgo ()= .

**(c)** *¿Qué sucede con el sesgo a medida que aumenta el tamaño de n de la muestra?*

=

= 0.

A medida que aumenta que aumenta el tamaño de n de la muestra, el sesgo tiende a cero.

**Ejercicio 4.**

*El número diario de desconexiones accidentales de un servidor sigue una distribución de Poisson. En cinco días, se observan: 2, 5, 3, 3, 7 desconexiones accidentales.*

**(a)** *Obtener el estimador de máxima verosimilitud de . ¿El estimador es insesgado? ¿Es*

*consistente?*

L ()=

L ()= .

ln L ()= ln ()

ln L ()= ln () + ln () - ln ()

ln L ()= -n ln e + ln -

ln L ()= -n \* 1 + ln -

ln L ()= -n + ln - .

= 0

-n + = 0

= n

= .

E ()= E ()

E ()= E ()

E ()= por (\*)

E ()=

E ()= n

E ()= .

V ()= V ()

V ()= V ()

V ()= por (\*\*)

V ()=

V ()= n

V ()= .

(\*) propiedad de linealidad de la esperanza.

(\*\*) propiedad de la varianza e independencia.

= .

= 0.

Por lo tanto, el estimador es insesgado (ya que E ()= ) y consistente (ya que = y = 0).

**(b)** *Obtener la estimación de a partir de la muestra dada.*

=

=

= 4.

**(c)** *Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de que ocurrirán 3 o más desconexiones accidentales y encontrar la estimación de dicha probabilidad a partir de los datos.*

P (X 3)= 1 - P (X 3)

P (X 3)= 1 - [P (X= 0) + P (X= 1) + P (X= 2)]

P (X 3)= 1 - ( + + )

P (X 3)= 1 - ( + + )

P (X 3)= 1 - ( + + )

P (X 3)= 1 - (1 + + ).

(X 3 | )= 1 - (1 + + ) por propiedad de invarianza

(X 3 | )= 1 - (1 + 4 + )

(X 3 | )= 1 - (1 + 4 + )

(X 3 | )= 1 - (1 + 4 + 8)

(X 3 | )= 1 - 13

(X 3 | )= 1 - 13 \* 0,018

(X 3 | )= 1 - 0,238

(X 3 | )= 0,762.

**Ejercicio 5.**

**(a)** *Sea , , … , una muestra aleatoria de una v.a. B (1, p). Hallar un estimador de máxima verosimilitud (EMV) de p.*

L (p)=

L (p)=

ln L (p)= ln []

ln L (p)= ln () + ln

ln L (p)= ln p + (n - ) ln (1 - p).

= 0

+ (-1)= 0

- = 0

=

=

- 1= - 1

=

= .

**(b)** *Se selecciona una muestra aleatoria de n chips fabricados por cierta compañía. Sea X= el número entre los n que tienen defectos y p= P (el chip tiene defecto). Se supone que sólo se observa X (el número de chips con defectos).*

**(i)** *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es la estimación de p?*

=

= 0,05.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, la estimación de p es 0,05.

**(ii)** *Si n= 100 y x= 5, ¿cuál es el EMV de la probabilidad , de que ninguno de los siguientes 6 chips que se examinen tenga defectos?*

= por propiedad de invarianza

=

=

= 0,735.

Por lo tanto, si n= 100 y x= 5, el EMV de la probabilidad es 0,735.

**Ejercicio 6.**

*Se denota por X la proporción de tiempo asignado que un estudiante seleccionado al azar emplea trabajando en cierta prueba de actitud, y se supone que la f.d.p. de X es:*

*f (x)= , donde .*

*Una muestra aleatoria de diez estudiantes produce la siguiente información: 0.92, 0.79, 0.90, 0.65, 0.86, 0.47, 0.73, 0.97, 0.94, 0.77.*

**(a)** *Utilizar el método de los momentos para obtener un estimador de y, luego, calcular la estimación para esta información.*

=

=

= (2 + 1)

= (2 + 1)

= ( - )

= (1 - 0)

= \* 1

= .

= .

=

=

2 + 1= (2 + 2)

2 + 1= 2 + 2

2 - 2 = 2 - 1

(2 - 2 )=

=

=

= .

=

=

=

=

= 1,5.

**(b)** *Obtener el EMV de y, luego, calcular la estimación para la información dada.*

L ()=

L ()= .

ln L ()= ln [ ]

ln L ()= ln + ln ()

ln L ()= n ln (2 + 1) +

ln L ()= n ln (2 + 1) + 2 .

= 0

\* 2 + 2 = 0

= -2

2 + 1=

2 + 1=

2= - 1

= - .

= -

= -

= 2,06 -

= 1,56.

**Ejercicio 7.**

*Sea , , … , una muestra aleatoria de una v.a. (, ).*

**(a)** *Hallar los estimadores de y por el método de los momentos. ¿Los estimadores son insesgados?*

=

= .

+ =

+ =

= -

= - .

E ()= E ()

E ()= E ()

E ()= por (\*)

E ()=

E ()= n

E ()= .

E ()= E [ - ]

E ()= E () - E [] por (\*)

E ()= E () - {V () + }

E ()= - [ V () + ] por (\*)

E ()= - [ + ] por (\*\*)

E ()= n ( + ) - ( n + )

E ()= + - ( + )

E ()= + - -

E ()= .

(\*) propiedad de linealidad de la esperanza.

(\*\*) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMM de es insesgado y el estimador EMM de no es insesgado.

**(b)** *Hallar los estimadores de y por el método de verosimilitud. ¿Los estimadores son insesgados?*

L (, )=

L (, )=

L (, )=

L (, )=

L (, )=

L (, )= .

ln L (, )= ln [ ]

ln L (, )= ln + ln []

ln L (, )= ln 2 + [ ] ln e

ln L (, )= ln 2 - \* 1

ln L (, )= ln 2 - .

= 0

(-1)= 0

= 0

= 0 \*

= 0

- = 0

- n= 0

n=

= .

= 0

2 - [ ]= 0

+ = 0

=

=

= .

E ()= E ()

E ()= E ()

E ()= por (\*)

E ()=

E ()= n

E ()= .

E ()= E []

E ()= E []

E ()= E {}

E ()= E ( + + )

E ()= E ( - 2 + n)

E ()= E ( - 2n + n)

E ()= E ( - 2n + n)

E ()= E ( - n)

E ()= E ( - )

E ()= E [ - ]

E ()= E () - E [] por (\*)

E ()= E () - {V () + }

E ()= - [ V () + ] por (\*)

E ()= - [ + ] por (\*\*)

E ()= n ( + ) - ( n + )

E ()= + - ( + )

E ()= + - -

E ()= .

(\*) propiedad de linealidad de la esperanza.

(\*\*) propiedad de la varianza e independencia.

Por lo tanto, el estimador EMV de es insesgado y el estimador EMV de no es insesgado.

**(c)** *Se determina la resistencia al corte de cada una de diez soldaduras eléctricas por puntos de prueba, dando los siguientes datos (lb/plg2): 392, 376, 401, 367, 389, 362, 409, 415, 358, 375. Si se supone que la resistencia al corte está normalmente distribuida, estimar la verdadera media de resistencia al corte y desviación estándar de resistencia al corte usando el método de máxima verosimilitud y el método de momentos.*

: “resistencia al corte de la i-ésima soldadura eléctrica”, i= 1, 2, … , 10.

(, ).

EMM:

=

=

= 384,4.

= -

= -

= 148119 -

= 148119 - 147763,36

= 355,64.

=

=

= 18,86.

EMV:

=

=

= 384,4.

=

=

= 355,64.

=

=

= 18,86.

**(d)** *Estimar la probabilidad de que la resistencia al corte de una soldadura al azar sea menor que 420.*

(X 420)= P ( )

(X 420)= P (Z )

(X 420)= P (Z )

(X 420)= P (Z 1,89)

(X 420)= F (1,89)

(X 420)= 0,9706.